BIJVOEGSEL

VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT
☐ ☐ VOOR WISKUNDE ☐ ☐
GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

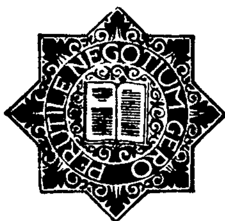
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

3e JAARGANG 1926/27, Nr. 2



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 10 à 12 vel f 4.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 3.—.

Het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 10 à 12 vel druks. Prijs *f* 4.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 8.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 3.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Van-Eeghenstraat".

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

---

meisjes te vergen, dat ze nog voor ze zelf de historische noodzakelijk gebleken ontwikkelingsgang hebben doorgemaakt, zich daarin thuis zullen voelen? Van dergelijke overwegingen uit is een methodiek te verdedigen, die het inleiden in de wiskundige denkvormen begint met kennismaking met de materie, waarmee ze werkt. Voor het getal is dit tot op zekere hoogte al gedaan en wordt het op de H. B. S. voortgezet o.a. bij het elementaire algebra-onderwijs. Voor den vorm is dit de taak van het aanvankelijk onderwijs in de planimetrie. Deze methode impliceert niet noodzakelijk het meetkundig experiment, wel is onmisbaar het teekenen en voorloopig wat primitief toegelichte construeeren van de eenvoudige figuren. Daarna kan aan een stof, die den leerling nog niet door langdurig gebruik geheel vertrouwd is geraakt (zoodat haar waarheden het karakter der vanzelfsprekenheid voor hem dragen) de behoefte aan een meer en meer consequent antwoorden op de vraag „Waarom is dat zoo?" of beter „Waarom *moet* dat altijd zóó zijn?" in den leerling worden gewekt. Daarvoor kieze men eigenschappen uit het begin der traditioneele meetkunde, die een eenvoudig en kort bewijs toelaten, dat — met wat hulp — door hem zelf gevonden kan worden. Bovendien moet daarbij tevens het typische van een bewijs, het algemeen-geldig-zijn, duidelijk en ongedwongen voor den dag komen. Dan volgen verder bewijzen van meerdere eigenschappen; bij het uitzoeken van die eigenschappen kan en mag de vraag naar een goed-sluitende theorie nog geen rol spelen. De aandacht van den leerling moet nog zeer langen tijd geconcentreerd op het enkele bewijs alleen: bewijzen met enkele, later meerdere schakels in de redeneering; bewijzen zonder, later met hulplijn en daarbij alleen die, welke ongedwongen te voorschijn komen; bewijzen, waarbij de weg, die moet worden ingeslagen om uit het gegevene tot het gevraagde te komen voor de hand ligt, waarbij dus de keus, die de leerling moet doen uit de hulpmiddelen, welke de theorie hem verschaft, eenvoudig is, en die waarbij die keus lastiger wordt. De waarde van de theorie blijft voorloopig alleen, dat ze de middelen verschaft, die dienen om eigenschappen af te leiden. Die middelen overzichtelijk rangschikken en dan veel en zelfstandig vraagstukken maken, wordt dan de eerste inleiding in de mathematische methode. Daarna komt het leggen van verband tusschen verschillende eigenschappen, het laten zien, dat ze in een bepaalde volgorde hooren (waarbij ook opgemerkt wordt, dat die volgorde toch min of meer relatief is) en eerst dan kan een

teruggaan tot de grondslagen en een voortaan elk deel der wiskunde streng logisch behandelen, uitgaande van de fundeerende axioma's en definities, bereikt worden door de leerlingen in het besef, dat dit haarfijn de dingen uitpluizen zin heeft. — In den aanvang zal dus de theorie veel lacunes vertoonen, naar de maatstaf van een volgroeiden mathematicus gebrekkig zijn (niet slordig!) — maar dat deert niemand, de aandacht is op een ander punt gericht èn later worden immers deze voorloopige bouwsels weer onder de loupe genomen! „das logische Element soll darum nicht verkümmern, sondern...... von Klasse zu Klasse fortschreitend immer deutlicher herausgearbeitet werden" [1]).

Kan nu een dergelijk principe op onze H. B. S. doorgevoerd worden? Bij eventueele invoering van het ontwerp der commissie niet! Het meetkundig programma zelf laat eenige ruimte in dit opzicht. Maar hoewel hierboven herhaaldelijk van de meetkunde sprake was, staat er tusschen de regels ook nog te lezen, dat de rekenkunde en algebra in den aanvang zich tot de techniek dienen te beperken en pas een meer wiskundig karakter mogen krijgen als de planimetrie de leerlingen op het peil bracht, waar ze dat kunnen waardeeren en tot hun eigendom maken. Wenden we ons nu tot het voorgestelde programma voor rekenkunde. Dat begint met „logische ontwikkeling van het getalbegrip",...... „grondeigenschappen en afgeleide eigenschappen" (met 't oog op latere uitbreidingen van het getalbegrip)"...... „invoering van het getal nul en de negatieve getallen"...... „invoering van de gebroken getallen". In de toelichting merkt de commissie op, dat ze geen bindend voorschrift wil geven, welke mate van strengheid bij de uitvoering van dit programma moet worden in acht genomen. Dat echter al een vrij groote mate van strengheid een voorwaarde is, zonder welke de uitvoering van dit programma onmogelijk wordt, is wel zeker, en dat daarmee dus in de bovengestelde methodische vraag partij is gekozen evenzeer.

De maatstaf, die de commissie aan wil leggen: iedere docent beslisse met het oog op zijn leerlingen wat te bereiken is „die eischen „mogen niet te hoog worden genoemd, zoolang de middelmatige „leerling bij inspanning van al zijn krachten er aan kan voldoen" [2]),

---

[1]) Klein-Schimmack. Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen I, 198. Teubner, Leipzig 1907.

[2]) Bijv. 2, 117.

is onaannemelijk voor wie zijn leerlingen als het ware uit zich zelf wil laten voortgaan in de richting der ideale strengheid, in plaats van ze zooveel van die strengheid als ze met eenige mogelijkheid verdragen kunnen van buiten op te leggen.

Bovendien van het boven verdedigde standpunt uit is het een verkeerde keus de rekenkunde te willen gebruiken als „een ongezochte „gelegenheid tot het aanbrengen van de fundamenteele logische „begrippen axioma, definitie, bewijs, stelling enz." [1]) juist omdat in de rekenkunde de te bewijzen stellingen zoo vanzelfsprekend zijn, dat het al een zekere mate van wiskundige scholing vooronderstelt. om hierin problemen te kunnen zien, die een oplossing vergen. Hier zal de leerling veel moeilijker dan op de meetkundeles het besef bijgebracht kunnen worden, dat er terecht gevraagd kan worden: *Moet* dit altijd zoo zijn en Waarom?, dat een bewijs geeischt kan worden. Het correct formuleeren van wat op de lagere school is geleerd is misschien vrijwel het eenige, wat we met de theorie der rekenkunde kunnen doen. Teekenend in dit opzicht is b.v., dat v. Thijn, die toch zeker niet gerekend kan worden tot de schrijvers van niet-exacte leerboeken, zijn Rekenkundige Hoofdstukken begint met de deelbaarheid en in het voorbericht naar aanleiding daarvan schrijft: „Al dadelijk laat ik de hoofdbewerkingen achterwege en „daarmee vervallen ook de stellingen over de commutatieve, distri- „butieve en associatieve eigenschappen. Ik acht het niet gewenscht „om in lange beschouwingen te treden over feiten en eigenschappen „die den leerling reeds lang bekend zijn; het overgroote deel van onze „jongens zijn voor dergelijke abstracties niet rijp".

Op meerdere plaatsen in het ontwerp-programma komt die zelfde neiging om zoo gauw mogelijk de maximale strengheid te bereiken naar voren, soms zelf zóó, dat het me bijna onmogelijk lijkt — geheel afgescheiden van principieele overwegingen — om het zoo ver te brengen. De bewijsmethode van volledige inductie in de eerste helft van de 2e klasse; kort daarna het binomium van Newton, dat dan door volledige inductie wordt bewezen — ligt deze zeer algemeene behandelingsmethode niet buiten het bereik van leerlingen van dien leeftijd?

Zoo kan ik me verder voorstellen, dat wie niet erg enthousiast is voor het plan om een deel van de goniometrie in de meetkundeles op

---

[1]) Bijv. 2, 117.

te nemen zich afvraagt of het wel wenschelijk is, op de goniometrieles bijna onmiddellijk al tot de verruiming van het hoekbegrip over te gaan. Zou in al dergelijke quaesties ook niet door een mildere formuleering wat meer speling gelaten kunnen worden, zóódat de verschillende inzichten der docenten en de overal weer andere uiterlijke omstandigheden beter tot hun recht kunnen komen? Alles wat een bepaalde methode, tenzij het er een geldt waarover alle leeraren het eens zijn, hetzij direct of indirect in een officieel programma vastlegt, moet m. i. vermeden worden. Zulk een programma wordt — en terecht — niet elk oogenblik gewijzigd. Het komende zal waarschijnlijk ons wiskundeonderwijs, de groei en ontwikkeling ervan gedurende vele jaren beheerschen. Moge het degenen, wien dit onderwijs lief is, in staat stellen om zoodra zich nieuwe mogelijkheden aan hen voordoen, die in de practijk van hun werk te toetsen! Moge het ook een zoo groot mogelijke vrijheid laten inzake den weg, die bewandeld moet worden om het doel te bereiken.

Vlissingen, April 1926.

Naschrift.

Tegen een minder in details afdalend programma bestaan bij de Commissie geenerlei bezwaren. Zij meende echter in haar ontwerp die detailleering wel te moeten geven, opdat duidelijk zou blijken, wat zij eigenlijk wilde. In hare toelichting heeft zij bovendien duidelijk uitgesproken, dat zij door de volgorde, waarin de in een leerjaar te behandelen onderwerpen worden opgesomd, geen bindend voorschrift over de volgorde van behandeling bedoelt.

De Commissie zal gaarne overwegen, in hoeverre het mogelijk is, de formuleering van het leerplan zoo te wijzigen, dat de ook haar ter harte gaande vrijheid van methode binnen de grenzen der voorgeschreven leerstof gewaarborgd blijft.

De Commissie.

Dr. B. Gonggrijp
N. L. W. A. Gravelaar
J. van de Griend
F. M. Jaeger
P. Jansen
Dr. J. Kors
Prof. Dr. J. C. Kapteyn
J. J. van Laar
C. L. Landré
Prof. G. Mannoury
Dr. P. Molenbroek
W. A. W. Moll
H. Offerhaus Ezn.
Prof. Dr. Ch. H. van Os
Prof Dr. A. J. v. Pesch
Prof. Dr. Jul. Petersen
Dr. O. Postma
Prof. Dr. J. G. Rutgers
Dr. G. Schaake
Prof. Dr. G. Schouten
Dr. D. J. E. Schrek
Prof. Dr. Fred. Schuh
H. Siersma
Th. Stieltjes
Prof. Dr. M. J. van Uven
H. G. A. Verkaart
H. L. Vernhout
J. Versluys
Dr. W. L. van de Vooren
Prof. Dr. Hk. de Vries
Prof. Dr. R. Weitzenböck
W. H. Wisselink
D. B. Wisselink
P. Wijdenes
P. Wijdenes & Dr. D. de Lange
Prof. Dr. J. Wolff
Prof. Dr. W. van der Woude

ONTWERP VOOR EEN EINDEXAMEN-PROGRAMMA VOOR DE H. B. S. MET VIJFJARIGEN CURSUS.

De Commissie, die zich op verzoek van het College van Inspecteurs heeft belast met het instellen van een onderzoek naar den toestand van het onderwijs in Wiskunde en aanverwante vakken op de H. B. Scholen met vijfjarigen cursus kan haar taak niet als beëindigd beschouwen met de opstelling van een ontwerp-leerplan voor Wiskunde, Mechanica en Kosmographie: wijzigingen in het leerplan toch vereischen noodzakelijk verandering ook in het eindexamenprogramma. In het volgende wordt daarom een ontwerp voor zulk een programma aangeboden; aan de formuleering daarvan gaan enkele algemeene beschouwingen vooraf.

De Commissie heeft zich bij de opstelling van het programma gericht naar den op het oogenblik gebruikelijken vorm van het eindexamen. Deze aanpassing aan het heerschende systeem sluit echter geen betuiging van instemming met dat systeem in: de Commissie acht het namelijk niet op haar weg liggend, de tegenwoordig zoo levendig besproken vraag, of het schoolexamen, zoowel in beginsel als wat de practische uitvoering daarvan betreft, al dan niet de voorkeur boven het vroeger gebruikelijke groepsexamen verdient, in behandeling te nemen; zij volstaat dus met het ontwerpen van een programma voor het schoolexamen; bij eventueele wederinvoering van den vroegeren vorm zou dus een wijziging noodzakelijk zijn.

Het komt der Commissie ongewenscht voor, dat het programma een al te gedetailleerde opsomming zou geven van de onderwerpen, welke op het eindexamen ter sprake kunnen komen; immers zulk een opsomming zou òf alle in het leerplan voorgeschreven onderwerpen omvatten en daardoor overbodig worden òf een deel van die onderwerpen met name noemen en de rest uitdrukkelijk weglaten en dan aanleiding kunnen geven tot examendressuur op de wèl- en tot ver-

waarloozing van de niet genoemde gebieden. Het is integendeel hare bedoeling, dat het eindexamen zóó zal worden afgenomen, dat het wel den leerling gelegenheid geeft te toonen, dat hij een zekere mathematische ontwikkeling heeft opgedaan, die hem tot de zelfstandige behandeling van niet te gecompliceerde, maar een zekere mate van inzicht vereischende vraagstukken in staat stelt, maar dat het er zich van onthoudt, te onderzoeken, of hij in het oplossen van bepaalde categorieën van min of meer conventioneele problemen behoorlijk is geoefend. Het programma moet daarom voldoende ruim worden geformuleerd, om bij de keuze van vraagstukken aansluiting aan al het behandelde logisch mogelijk te maken.

In het volgende ontwerp zal men bij ieder onderdeel een opsomming aantreffen van onderwerpen, die van de examenstof worden uitgesloten. Het is niet de bedoeling, dat deze opsomming zal worden opgenomen in de definitieve redactie van het programma; ze dient eenerzijds slechts, om de grenzen van de voorgestelde examenstof duidelijker te doen uitkomen; anderzijds zal zij wellicht een weinig kunnen bijdragen tot de bestrijding van een voorstelling, waartoe de publicatie van het Ontwerp-Leerplan veelvuldig aanleiding schijnt te hebben gegeven, de voorstelling namelijk, als zouden daarin wel tal van nieuwe onderwerpen zijn opgenomen, maar geen der thans gebruikelijke zijn geschrapt.

Het ontwerp-leerplan legt in veel sterkere mate dan het tegenwoordige normaalprogramma den nadruk op de theoretische behandeling van de wiskunde; het is gebouwd op de overtuiging, dat het aanbrengen van fundamenteele theoretische inzichten belangrijker moet worden geacht dan het, anders dan als middel tot verdieping van inzicht, ontwikkelen van technische vaardigheid; uit den aard der zaak heeft deze overtuiging ook de samenstelling van het ontwerp-eindexamenprogramma beinvloed. Om haar tot haar recht te doen komen, stonden bij eerste beschouwing twee wegen open.

In de eerste plaats bestond de mogelijkheid, om, zooals dat reeds voor de vakken Natuur- en Scheikunde te doen gebruikelijk is, ook op het schriftelijk examen in Wiskunde, naast de oplossing van vraagstukken, beantwoording van theorievragen te eischen en verder de thans geldende regeling van vrijstellingen van mondeling examen te behouden. Tegen deze handelwijze bleken echter ernstige bezwaren te bestaan: het ontwerp-leerplan toch is met opzet — namelijk om den leeraar gelegenheid te geven, rekening te houden, eener-

zijds met eigen persoonlijken aanleg en voorliefde, anderzijds met de talenten, de neigingen en de aanstaande bestemming van zijne leerlingen — eenigszins vaag en zwevend gehouden. De hierdoor geschapen vrijheid kan aanleiding geven tot vrij aanzienlijke verschillen zoowel in den omvang der behandelde leerstof als in het peil der behandelingswijze tusschen scholen onderling, tusschen klassen van eenzelfde school onder verschillende leeraren en zelfs tusschen opvolgende klassen onder eenzelfden leeraar. Het is duidelijk, dat het uniforme schriftelijk examen met het bestaan van deze verschillen onmogelijk rekening kan houden. Het zal nooit meer kunnen doen, dan, zoowel op het gebied van vraagstukken als op dat der theorie, zekere algemeene minimumeischen stellen, waaraan alle wiskunde-onderwijs noodzakelijk zal moeten voldoen en dit sluit het stellen van volledige theorievragen, welker zelfstandige schriftelijke behandeling toch steeds een veel verder gaande beheersching van de stof onderstelt dan de met voortdurenden steun van den examinator tot stand komende mondelinge beantwoording, vanzelf uit. Hoewel dus het schriftelijk examen de theorie niet geheel behoeft te verwaarloozen, kan het toch niet in staat worden geacht, steeds en overal de theoretische ontwikkeling der candidaten voldoende tot haar recht te doen komen. Deze overweging heeft de Commissie gevoerd tot de conclusie, dat daarom ook gebroken zal moeten worden met de gewoonte, om met een schriftelijk examen te volstaan, wanneer daarvoor het cijfer zeven of een hooger cijfer is behaald. Zij stelt dus voor, het eindexamen wiskunde voor alle candidaten zoowel een schriftelijk als een mondeling gedeelte te laten omvatten. Het schriftelijk gedeelte kan dan den waarborg geven voor de aanwezigheid van het uniform geeischte minimum, het mondeling examen gelegenheid bieden, daarnaast de resultaten te toonen, waartoe de vrijheid van differentiatie voert.

Er werd boven reeds uitgesproken, dat ook het schriftelijk examen met de meer theoretische oriënteering van het ontwerp-leerplan rekening zal kunnen houden. Men vrage daartoe toepassingen van de hoofdzaken der theorie met vermijding van die lange berekeningen en die bijzondere gevallen, die een speciale en streng doorgevoerde training onderstellen, maar men eische daarentegen, dat de candidaat ook schriftelijk rekenschap zal kunnen geven van de uitgevoerde constructies, de toegepaste formules en de gebruikte eigenschappen. Het zal daarbij wenschelijk zijn, den tijd voor het

schriftelijk examen eenigszins ruimer te nemen, dan thans het geval is.

De vraag, of bij de hier geschetste opvatting van de rol, die het schriftelijk en het mondeling deel van het examen zullen hebben te vervullen, beide deelen even zwaar moeten wegen bij de beoordeeling van den candidaat, acht de Cmmissie niet voor algemeene beantwoording vatbaar. De beslissing daarover zal aan het oordeel van deskundige en examinator moeten worden overgelaten.

De Commissie heeft er naar gestreefd, om, evenals in het ontwerp-leerplan, zoo ook in het ontwerp-eindexamenprogramma haar overtuiging tot uiting te brengen, dat het wenschelijk is, het besef van den nauwen onderlingen samenhang van de verschillende onderdeelen der wiskunde te verlevendigen. Zij wil daarom de scheidingslijnen tusschen de deelen, waarin het examen uit den aard der zaak uiteenvalt, niet te scherp trekken en zij zou het op prijs gesteld wenschen te zien, inplaats van, zooals vroeger wel voorkwam, euvel geduid, wanneer een candidaat bij het oplossen van een vraagstuk uit een zeker gebied een handig gebruik weet te maken van het elders geleerde.

Het zal in dit verband wel geen bevreemding wekken, dat zij de gonio- en trigonometrie als afzonderlijk onderdeel van het examen wil laten verdwijnen; de geïsoleerde plaats toch, die dit leervak zoowel in het onderwijs als op het eindexamen inneemt, wekt bij de leerlingen te vaak de voorstelling op, als zou dit deel der wiskunde geheel los staan van de overige behandelde gebieden; zij levert bovendien het gevaar van te groote technische complicatie der opgegeven vraagstukken op. De Commissie wil dus de goniometrie, de studie dus van de eigenschappen der goniometrische functies, met de algebra, waarin het functie-begrip is ontwikkeld en de overige ter sprake komende functies zijn behandeld, tot één geheel vereenigen, de trigonometrie daarentegen bij de meetkunde onderbrengen, waarvan zij immers een deel is.

Het woord meetkunde moet hierbij dan in den ruimsten zin worden gelezen, dien men er op de H. B. S. aan kan toekennen; het omvat de planimetrie evengoed als de stereometrie en het onderstelt dus een ingrijpende wijziging in de heerschende traditie, op het eindexamen alleen kennis der stereometrie uitdrukkelijk te eischen, de planimetrie noch in het programma der klassen IV en V noch in het eindexamen-programma te vermelden, en daardoor aanleiding te

geven tot verwaarloozing van dit vak na het eind der derde klasse, tot schade voor de algemeene wiskundige ontwikkeling en tot steeds terugkeerende belemmering bij de studie der ruimte-meetkunde. De vereeniging van de planimetrie met de trigonometrie denkt de Commissie zich nu zoo, dat, zonder bepaalde regelmaat, zoowel meetkundige vraagstukken zullen worden opgegeven, waarbij òf de toepassing van zuiver planimetrische methoden òf het gebruik van trigonometrische formules voor de hand ligt, als zulke, waarbij het aan het inzicht van den candidaat wordt overgelaten, langs welken weg hij het gewenschte resultaat wil bereiken.

In een dergelijk verband kan de trigonometrie ook tot de stereometrie gebracht worden; zij kan eenerzijds dienst doen als hulpmiddel bij stereometrische berekeningen, anderzijds kan het bewijs van bepaalde goniometrische relaties tusschen de elementen eener stereometrische figuur worden geeischt.

Het is na de voorafgaande beschouwingen mogelijk, thans het schema te ontwikkelen, dat de Commissie voor de inrichting van het schriftelijk examen voorstelt. Zij denkt zich, evenals thans het geval is, het examen afgenomen gedurende vier morgens, op elk waarvan zij een tijd van minstens $2\frac{1}{2}$ uur ter beschikking zou willen stellen. En wel als volgt:

I. Rekenkunde, Algebra en Goniometrie, samen aan te duiden als *Analyse*.

II. Planimetrie en Trigonometrie, samen aan te duiden als *Vlakke Meetkunde*.

III. Stereometrie (eigenschappen en berekeningen) en Trigonometrie, samen aan te duiden als *Ruimte-meetkunde*.

IV. Stereometrie (constructies, zoowel volgens de methode der orthogonale parallelprojectie, als volgens die der uitslagen), aan te duiden als *Beschrijvende Meetkunde*.

De Commissie acht het in het belang der candidaten dringend gewenscht, dat het schriftelijk examen voor wiskunde niet van korteren duur zij, dan hier is voorgesteld: een niet te kort examen geeft aanleiding tot een atmospheer van rust en biedt kans op compensatie van gedeeltelijk ongunstige resultaten.

Voor het aldus ingerichte schriftelijk examen zullen twee cijfers moeten worden gegeven, waarbij de sub I en II genoemde onderdee-

len als Wiskunde I, de sub III en IV genoemde als Wiskunde II kunnen worden aangeduid. Op het mondeling examen kan deze indeeling behouden blijven; voor ieder der twee in de laatste samenvatting bedoelde gebieden zal een half uur ter beschikking moeten worden gesteld. Op de lijst der eindcijfers zullen in overeenstemming met de voorgestelde regeling van het examen twee cijfers voor Wiskunde moeten worden gegeven.

Hieronder moge thans het voorstel voor het programma van het Eindexamen volgen:

Analyse.

Voor het schriftelijk examen wordt geëischt de kennis van:

de functies $y = ax + b$ en $y = ax^2 + bx + c$.

identiteiten.

theorie en toepassingen van reken- en meetkundige reeksen.

theorie en toepassingen van logarithmen.

theorie en toepassingen van complexe getallen.

de goniometrische functies, hare eigenschappen en onderlinge betrekkingen.

de in het leerplan vermelde goniometrische vergelijkingen.

Voor het mondeling examen wordt bovendien geeischt de kennis van:

de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening, in den omvang, waarin het leerplan de behandeling daarvan voorschrijft.

Het behandelde uit de getallentheorie.

Voor de oplossing van de vraagstukken van het schriftelijk examen mag niet noodig zijn van de kennis van:

andere logarithmische en exponentieele vergelijkingen, dan die, waartoe de theorie van logarithmen en meetkundige reeksen aanleiding geeft.

herleiding van wortelvormen.

vergelijkingen, die met kunstgrepen moeten worden opgelost.

onbepaalde vergelijkingen.

de homographische functie.

de differentiaal- en integraalrekening en de getallentheorie.

Vlakke Meetkunde.

Voor het schriftelijk examen wordt geëischt de kennis van:

de voornaamste eigenschappen en constructies der vlakke meetkunde.

eenvoudige toepassingen van de theorie der goniometrische functies op de behandeling van vlakke figuren.

Voor het mondeling examen wordt bovendien geëischt de kennis van de eenvoudigste eigenschappen der kegelsneden.

Voor de oplossing van de vraagstukken van het schriftelijk examen mag niet noodig zijn de kennis van:

de planimetrische formules voor de lengte van de merkwaardige lijnen in een driehoek.

de fomules voor de lengte van de zijden en de diagonalen van regelmatige veelhoeken.

andere goniometrische vergelijkingen, dan die in het leerplan uitdrukkelijk zijn vermeld.

de formules van Gauss voor de goniometrische functies van de halve hoeken van een driehoek.

het logarithmisch maken van formules uit de trigonometrie.

Ruimte-meetkunde.

Voor het schriftelijk examen wordt geëischt de kennis van:

de beginselen van de stereometrie.

de eenvoudigste veelvlakken en omwentelingslichamen, meer uit een oogpunt van theorie en van constructie dan van berekening.

de beginselen van de meetkunde op den bol.

eenvoudige toepassingen van de theorie der goniometrische functies op de behandeling van ruimtefiguren.

Deze eischen gelden ook voor het mondeling examen.

Voor de oplossing van de vraagstukken van het schriftelijk examen mag niet noodig zijn de kennis van:

inhoudsformules van het afgeknotte driezijdige prisma, de prismoïde, de bolschijf, de bolring en het bolsegment,

regelmatige veelvlakken.

Beschrijvende Meetkunde.

Voor het schriftelijk examen wordt geëischt de kennis van:

de grondconstructies van de orthogonale parallelprojectie.

de toepassing hiervan op vraagstukken betreffende de onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken en de constructies, die met behulp van deze elementen kunnen worden uitgevoerd.

de constructie van doorsnijdingen van eenvoudige, door platte vlakken begrensde lichamen met rechte lijnen en platte vlakken.

de constructie van doorsnijdingen van omwentelingskegels en omwentelingcylinders met rechte lijnen en platte vlakken, voorzoover daarbij geen kennis wordt vereischt van andere kegelsneden dan rechte lijnen en cirkels.

het vervaardigen van uitslagen van eenvoudige, door platte vlakken begrensde lichamen.

de uitvoering van eenvoudige constructies, die met behulp van deze uitslagen kunnen worden verricht.

Voor het mondeling examen gelden dezelfde eischen.

Algemeene opmerking.

Voor het mondeling examen in elk onderdeel kan worden geëischt de kennis van die gebieden, waarmee de leeraar in de laatste twee leerjaren de leerstof heeft uitgebreid en die door hem uitdrukkelijk als behoorende tot de stof voor het eindexamen zijn aangewezen.

Het boven voorgestelde programma zal vermoedelijk weinig toelichting behoeven, daar het een logisch gevolg van het ontwerp-leerplan is en dus met dezelfde argumenten verdedigd kan worden. Slechts enkele losse opmerkingen mogen hier een plaats vinden:

Aangaande vraagstukken met logarithmen worde nog eens gewaarschuwd tegen overdrijving van cijferwerk. Men stelle de eischen in overeenstemming met de mogelijkheden, die bij practische metingen bestaan. Wil men dieper op het onderwerp logarithmische berekeningen ingaan, dan houde men zich bezig met de te bereiken nauwkeurigheid. Hierin heeft men ook een geschikt en nuttig onderwerp tot uitbreiding van het mondeling examen.

De onderwerpen differentiaal- en integraalrekening en getallentheorie zijn alleen vermeld onder de eischen voor het mondeling examen. Het doel hiervan is, te vermijden, dat bij de differentiaal- en integraalrekening de nadruk valt op de ontwikkeling van technische vaardigheid, zooals die voor de oplossing van vraagstukken al spoedig vereischt zou zijn en aldus de meer theoretische behandelingswijze te waarborgen; bovendien kan door opname van deze onderwerpen onder de stof voor het mondeling examen het best rekening worden gehouden met de verschillen, die zich, vooral in den eersten tijd, in de bij het onderwijs bereikte resultaten noodzakelijk zullen voordoen.

In verband hiermee zal het wenschelijk zijn, dat toegelaten worde, dat een leeraar, die de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening hoofdzakelijk of uitsluitend in de mechanica-lessen heeft behandeld, deze ook op het mondeling examen mechanica examineert. Dergelijke kwesties kunnen echter aan het overleg van deskundige en examinator worden overgelaten.

Voor de Meetkunde beoogt het ontwerp een sterke inkrimping van het onderwerp inhoudsberekeningen; de hiervoor op te geven vraagstukken vereischen in den regel namelijk niet zoozeer stereometrisch inzicht als wel handigheid in het manoevreeren met formules. (Als voorbeeld kan het eerste vraagstuk voor Stereometrie voor het jaar 1926 genoemd worden.)

Het examen Beschrijvende Meetkunde behoeft naar het oordeel der Commissie geen wijziging te ondergaan; het ontwerp wil op dit gebied alleen een nauwkeuriger formuleering van de eischen geven dan in het thans vigeerende programma voorkomt. Het verdient aanbeveling, te blijven vasthouden aan de tot dusver gevolgde methode, om steeds één vraagstuk over de beginselen te geven en een tweede, waarin het constructieve element meer op den voorgrond komt. (Als voortreffelijk voorbeeld van de soort vraagstukken, die de Commissie gaarne opgegeven zou zien, moge hier het eerste vraagstuk Beschrijvende Meetkunde voor het jaar 1926 vermeld worden.)

Thans overgaande tot het ontwerp-programma voor Mechanica, merkt de Commissie vooreerst op, dat zij aanvankelijk heeft overwogen, het schriftelijk gedeelte van het examen voor dit vak te laten vervallen. Het motief daartoe ontleende zij voornamelijk hieraan, dat de vraagstukken, die vóór 1920 voor Mechanica werden opgegeven, langzamerhand van een zoo conventioneel type waren geworden, dat het meermalen voorkwam, dat leerlingen zonder veel inzicht toch een zeer hoog cijfer voor het schriftelijk examen Mechanica wisten te behalen. Daar zij dan bovendien van het mondeling werden vrijgesteld, bestond er ook geen mogelijkheid meer tot correctie van dit cijfer. Wanneer dan ook bij nadere overweging het schriftelijk examen in het ontwerp-programma behouden is gebleven, is dit geschied in het vertrouwen, dat de op te geven vraagstukken geen voortzetting zullen vormen van de vroeger gebruikelijke, maar dat naast technisch eenvoudige, maar op inzicht een beroep doende vraagstukken ook theorie-vragen zullen worden gesteld. De bedoeling is, dat het mondeling examen daarna ook hier voor alle candidaten

verplicht zal zijn. Met de gewoonte, om op het mondeling examen Mechanica met Kosmographie te combineeren, zal moeten worden gebroken; immers in de praktijk leidde dit tot beperking van het examen Kosmographie tot een tijd van vaak niet meer dan tien minuten. Bovendien is er geen enkel redelijk motief aan te voeren, waarom het examen in deze twee vakken met minder uitvoerigheid zou moeten worden afgenomen, dan bij alle andere het geval is. Zoowel voor Mechanica als voor Kosmographie wordt dus een mondeling examen van 20 minuten gewenscht.

Hieronder volgt thans voor beide vakken het ontwerp-programma:

Mechanica.

Hiervoor wordt geëischt de kennis van:

de eenvoudigste eigenschappen van vectoren.

de beginselen der kinematica in aansluiting aan de behandelde differentiaalrekening.

de eenparige en de eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging.

de eenparige cirkelbeweging.

de enkelvoudige trilling.

de beginselen der dynamica.

de toepassing dezer beginselen op eenvoudige vraagstukken uit de in het leerplan vermelde gebieden.

de begrippen arbeid en arbeidsvermogen en de toepassingen daarvan.

de beginselen der statica.

de toepassing dezer beginselen op eenvoudige vraagstukken uit de in het leerplan vermelde gebieden.

de botsing van volkomen veerkrachtige of volkomen onveerkrachtige lichamen.

Kosmographie.

Voor het examen in dit vak wordt geëischt de kennis van de onderwerpen, die in het leerplan vermeld worden.

Voor het mondeling examen in Mechanica en Kosmographie geldt de algemeene opmerking, die op blz. 4 over het mondeling examen in wiskunde is gemaakt.

De Commissie:
H. J. E. Beth, voorzitter.
J. van Andel.
P. Cramer.
E. J. Dijksterhuis, secretaris.

BOEKBESPREKING.

Dr. M. van Haaften. Reziprokentafel aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000. Ausgabe F. von Noordhoff's Tafeln, 8°, XXIII + 50 blz.; Groningen, P. Noordhoff, 1926; geb. *f* 2.40.

Het is een goede gedachte van Dr. van Haaften geweest een tafel der omgekeerden van alle getallen van 1 tot 10000 samen te stellen, daar er aan zulk een tafel inderdaad behoefte was. Een zoodanig werk moet aan twee eischen voldoen: het moet ten eerste betrouwbaar zijn en ten tweede op zoodanige overzichtelijke wijze zijn ingericht, dat men gemakkelijk, hetgeen men wenscht te weten, kan vinden en de kans zich bij het opzoeken te vergissen zeer gering is. Naar hetgeen de schrijver in de uitvoerige inleiding, waarvan hij zijn werk voorzien heeft, meedeelt omtrent de contrôle-maatregelen, die hij genomen heeft, om te zorgen, dat de tafel geheel betrouwbaar zal zijn, is m.i. aan den eersten hier bovengenoemden eisch geheel voldaan. Wat nu de inrichting van de tafel betreft, had de schrijver er zich toe kunnen bepalen met alleen de omgekeerden van alle getallen van vier cijfers op te geven, daar bijv. het omgekeerde van 341 zich bij de decimale schrijfwijze van het omgekeerde van 3410 alleen maar onderscheidt door de plaats van het decimaalteeken. Terecht heeft de schrijver dit niet gedaan, maar van alle getallen van 1 tot 10000 de omgekeerden aangegeven. De getallen staan in hun natuurlijke volgorde onder elkaar, ze zijn vet gedrukt, terwijl naast ieder getal in gewonen druk zijn omgekeerde in zeven cijfers nauwkeurig is aangegeven. Zoo staat bijv. naast 3787 het getal 2640613, dus is het omgekeerde van 3787 het getal 0,0002640613 en van 0,03787 het getal 26,40613, terwijl beide omgekeerden nauwkeurig zijn in zeven cijfers. Een moeilijkheid is nu om uit de plaats van het decimaalteeken in het getal de plaats van dit teeken in het omgekeerde van het getal te bepalen; in de inleiding worden de regels hiervoor door den schrijver meegedeeld. Verder laat de schrijver in de inleiding aan de hand van een achttal voorbeelden zien, hoe men bij het uitvoeren van verschillende berekeningen een nuttig gebruik van een reciprokentafel kan maken, terwijl hij tot besluit een literatuuroverzicht van de voornaamste reciprokentafels geeft. Ik kan mijne bespreking eindigen met deze handige en keurig uitgevoerde tafel in alle opzichten aan te bevelen.

W. C. Post.

Differentiaal- en Integraalrekening voor den technicus. Beknopte uitgave door *W. J. Heydeman,* Directeur van de Middelbare Technische School te Amsterdam. Tweede druk. Deventer 1926 - AE. E. Kluwer. Prijs *f* 3.—.

Aan het Voorbericht ontleen ik 't volgende „Deze beknopte uitgave der Differentiaal- en Integraalrekening heeft haar ontstaan te danken aan het feit, dat de grootere uitgave — waarin ook ten deele de Differentiaalvergelijkingen worden behandeld — voor vele doeleinden te uitgebreid bleek te zijn. Voor middelbare technische scholen en wellicht ook voor de hoogste klasse der H. B. S. 5 j. c. geeft het vrijwel die deelen der hoogere wiskunde, welke noodig of wenschelijk zijn... Onder Deel I wordt verstaan Wiskundige hoofdstukken van den zelfden schrijver, waarin die onderwerpen behandeld worden uit de algebra en de analytische meetkunde, welke voor goed begrip der Diff. en Int. rek. noodzakelijk zijn."

Ik moet beginnen met te verklaren, dat ik „Deel I" van den zelfden schrijver niet ken, en dat ik dus ook niet kan beoordeelen, of enkele bezwaren, die ik straks zal noemen en die ik tegen zijn Beknopte Diff. en Int. rek. heb, in deel I worden opgehelderd, maar het komt mij toch voor, dat o.a. al de aanbeveling, om het boek op H. B. scholen (straks!) te gaan gebruiken, maakt, dat het „op zich zelf" moet beoordeeld worden.

Nu moet ik erkennen, dat het boek in 't algemeen genoeg materiaal geeft — zeer vermoedelijk wel voor den technicus, als door den schrijver bedoeld — zeer zeker, misschien wel te veel, voor den (toekomstigen!) H. B. S.-scholier. (Voor mijn Gymnasium-leerlingen geeft m.i. 't boek eensdeels te veel en anderdeels te weinig). Mijn bezwaren gelden dan ook in hoofdzaak andere zaken en wel in de eerste plaats een en ander, dat ik op blz. 2 aantref. Ik lees daar, dat „met differentiaal een oneindig kleine verandering bedoeld wordt." Niet alleen dat ik bezwaar heb tegen deze uitspraak zelf, maar ook tegen het feit, dat de schrijver hier in dezelfde fout vervalt als tal van anderen nl. dat hij geen (eenigszins) behoorlijke definitie geeft van „oneindig klein". Een eind verder lees ik „mits de kromme in de buurt van P continu is". Ook deze uitdrukking doet vragen rijzen: wat is „in de buurt van", wat is „continu"?

En wanneer dan de schrijver verder laat volgen: „Q' ligt dan oneindig dicht bij P; de snijlijn, die P en Q' bevat, wordt raaklijn in P genoemd", dan komt 't mij voor, dat hij over allerlei fundamenteele kwesties wel wat heel licht heen loopt. Verder komt 't mij, van uit een paedagogisch standpunt bezien, ongeschikt voor, om — nu de schr. de differentialen als oneindig kleinen beschouwt — overal die differentialen en niet de differentiaalquotienten af te leiden. Verder vind ik het „logarithmisch" afleiden van verschillende resultaten (maar dat is misschien een kwestie van smaak), omdat het nog al veel gebeurt, wat gekunsteld, niet natuurlijk.

Het is misschien mogelijk, dat de leerlingen van den heer H., bij 't gebruik van zijn boek de door mij genoemde bezwaren nooit bemer-

ken, omdat zij 't ook louter voor de toepassing op de practijk bestudeeren. Kritiek op fundamenten en op methoden komt misschien in 't algemeen bij hen niet op. Dàn kan 't boek misschien toch nog wel goede diensten bewijzen. Doch een wijder gebruik ervan zou ik toch maar onder zekere reserve willen aanbevelen.

Het boek bevat een groote collectie vraagstukken. Toch valt 't mij op, dat 't aantal toepassingen op de techniek — en ik zou zeggen dat de belangstelling der leerlingen, waarvoor het werk hoofdzakelijk bedoeld is, zich toch wel in die richting zal bewegen, — zeer gering is.

D. P. A. V.

J. Versluys, Gewone Logarithmen, 16e druk, *f* 0.40.

P. Wijdenes, Algebra voor M. U. L. O., I 18e druk, *f* 1.40.

„ „ „ „ II, B-examenuitgave, 7e druk *f* 2.25.

„ Oplossingen van de vraagstukken uit de meetkunde voor M. U. L. O., 3e druk *f* 0.90.

Dit boekje bevat behalve oplossingen en antwoorden van vraagstukken beschouwingen van den schrijver over verschillende punten in het planimetrie-onderwijs. Deze beschouwingen lijken mij voor onderwijzers en leeraren de lezing zeer waard, zij hebben m.i. vooral *practische* waarde.

J. H. S.

Dr. G. C. Gerrits, Schriftelijke opgaven van de eindexamens der hoogere burgerscholen vanaf 1868. 21e druk *f* 2.50, geb. *f* 2.75.

Deze nauwkeurig bewerkte uitgave is voor haar omvang goedkoop.

J. H. S.

Dr. M. Euwe. Differentiaalinvarianten van twee covariantevectorvelden met vier veranderlijken (Proefschrift) *f* 2.50.

(Uitgaven van P. Noordhoff te Groningen).

P. Wijdenes, Lagere Algebra, Deel II. Vergelijkingen, Functies, Grafieken en Reeksen. Tweede druk. P. Noordhoff, Groningen. 1927.

Thans is ook van het tweede deel van Wijdenes, Lagere Algebra, dit voor allen, die naar het bezit van de acten Wiskunde L. O. of KI streven onmisbaar werk, de tweede druk verschenen. Reeds bij oppervlakkig doorbladeren valt het op, dat we hier geenszins met een machinalen herdruk te doen hebben: op tal van plaatsen vertoont het werk de sporen van den ernstigen herzieningsarbeid, die er aan verricht is. Met algemeene instemming zal ongetwijfeld de opname van de grafieken van de exponentieele en de logarithmische functie (tot nu toe alleen in het derde deel der School-Algebra voorkomend) en van de onderwerpen: reken- en meetkundige, reken-meetkundige

en harmonische reeksen en van de Samengestelde Interestrekening, die tot nu toe slechts in de School-Algebra en in de Middel-Algebra te vinden waren, worden begroet. Ook het hoofdstuk Samengestelde Interestrekening is ter dege herzien. De schrijver heeft hier, evenals trouwens reeds in de School-Algebra zijn vroegere afwijzende standpunt, tegen wat men in de schoolboeken wel de theoretische methode van interestberekening over onderdeelen van jaren pleegt te noemen, verlaten.

Zou de schrijver bij een derden druk den z. g. gewonen vorm van de vierkantsvergelijking niet eens willen opruimen? Voor de afzonderlijke behandeling van het geval $a = 1$ is toch geen enkel redelijk argument aan te voeren. Tevens moge worden aanbevolen, een apart hoofdstuk aan de homographische functie te wijden en ook het hoofdstuk over de methode der Volledige Inductie uit de Middel-Algebra naar het elementaire werk over te brengen.

E. J. Dijksterhuis.

NAAR AANLEIDING VAN DE VERDEELING IN DE UITERSTE EN MIDDELSTE REDEN

DOOR

Dr. PAUL DE VAERE (Brussel).

INLEIDING.

De manier, waarop de gulden snede in de mij bekende Hollandsche leerboeken behandeld wordt, laat m. i. te wenschen over in twee opzichten: 1) men verwaarloost de voorafgaande bespreking, waaruit moet blijken voor hoeveel oplossingen het vraagstuk vatbaar is; 2) als gevolg daarvan komt slechts de *inwendige* verdeeling tot haar recht, en alleen terloops (in de meeste boeken zelfs heelemaal niet) wordt gewag gemaakt van de *uitwendige* verdeeling.

Doel van dit opstel is, de vraag, in gansch haar omvang, eens volledig te behandelen. Daartoe is het onontbeerlijk eerst het begrip *Deelverhouding van een punt ten opzichte van een lijnsegment* aan te brengen, wat dan ook het onderwerp uitmaakt van Paragraaf I.

Dit begrip diende trouwens in elk Meetkunde-boek met de meeste zorg uiteengezet te worden; feitelijk ligt het ten grondslag aan heel de theorie van de evenredige lijnstukken; bewust of onbewust, op min of meer strenge wijze wordt het door elken schrijver gebruikt; doch, zonderling genoeg, de benaming wordt steeds angstvallig geweerd (ik vond ze alleen in Prof. HK. DE VRIES' *Beknopt Leerboek der Projectieve Meetkunde*) en dit geeft vaak aanleiding tot langdradige en onduidelijke omschrijvingen.

In Paragraaf II komt de eigenlijke *Verdeeling in uiterste en middelste reden* ter sprake.

In Paragraaf III worden de gevonden resultaten toegepast op de *Constructie van de* twee *regelmatige tienhoeken* (convex en

niet-convex) die men in een cirkel kan beschrijven. [Over niet-convexe regelmatige veelhoeken reppen de Hollandsche leerboeken, gansch ten onrechte, geen woord.]

Aan 't slot van deze inleiding wensch ik uitdrukkelijk te verklaren, dat de leidende gedachten van de hier gevolgde methode te vinden zijn in sommige Fransche en Belgische leerboeken; alleen in talrijke bijzonderheden en complementen kan mijne behandelingswijze op oorspronkelijkheid aanspraak maken.

I. DEELVERHOUDING VAN EEN PUNT TEN OPZICHTE VAN EEN LIJNSEGMENT.

1. *Absolute of rekenkundige deelverhouding.*

Op een rechte lijn l beschouwt men een segment AB en een punt C; hoe dit punt ook moge gelegen zijn t.o. van AB, steeds zullen we zeggen, dat C het segment AB verdeelt in twee stukken AC en BC, er bijvoegend *inwendig* als C tusschen A en B ligt (fig. 2), *uitwendig* in het tegenovergestelde geval (fig. 1 en 3).

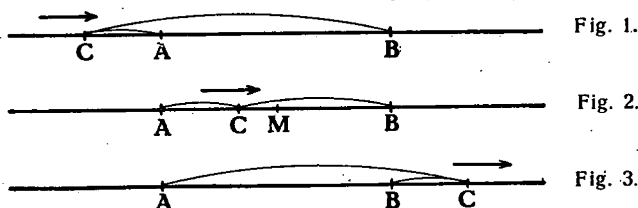


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.

De verhouding $\frac{AC}{BC}$ noemen wij de *absolute deelverhouding van het punt C t. o. van het segment AB;* de deelverhouding van C t. o. van BA is $\frac{BC}{AC}$. Beide zijn natuurlijk elkaars omgekeerde.

Voor elken stand van C (uitgezonderd als C in B komt) heeft de deelverhouding $\frac{AC}{BC}$ een wel bepaalde waarde k, waarvan wij nu de veranderingen willen nagaan als C zich over de rechte lijn l beweegt, in de pijlrichting, van oneindig links tot oneindig rechts.

2. *Veranderingen van de deelverhouding* $\frac{AC}{BC}$ *bij wisselenden stand van C.*

Ligt C op het verlengde van BA (fig. 1), dan is

$$k = \frac{AC}{BC} = \frac{BC - BA}{BC} = 1 - \frac{BA}{BC}.$$

Verwijdert C zich oneindig ver op het verlengde van BA, dan is $\lim k = 1$. Nadert C tot A, dan neemt k af; komt C in A, dan is $k = 0$. Dus, *links van A, neemt k ononderbroken af van 1 tot 0.*

Beweegt C zich over het segment AB van A naar B (fig. 2), dan neemt AC toe, BC af en k neemt dus toe. In 't midden M van AB is $k = 1$; nadert C tot B, dan is $\lim k = +\infty$. Dus, *van A naar B neemt k ononderbroken toe van 0 tot $+\infty$.*

Ligt C op het verlengde van AB (fig. 3), dan is

$$k = \frac{AC}{BC} = \frac{AB + BC}{BC} = 1 + \frac{AB}{BC}.$$

Nadert C tot B, dan is $\lim k = +\infty$; verwijdert C zich van B, dan neemt k af, en verwijdert C zich oneindig ver in de pijlrichting, dan is $\lim k = 1$. Dus, *rechts van B neemt k ononderbroken af van $+\infty$ tot 1.*

Samenvattend, krijgen wij dit overzicht van de schommelingen van k, als C zich beweegt over de rechte lijn l van oneindig links naar oneindig rechts:

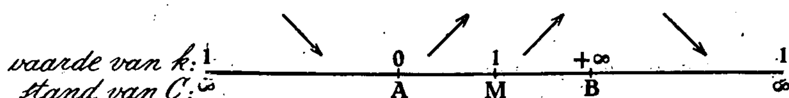


Fig. 4

(Een dalend pijltje beteekent een afnemen van k;
„ stijgend „ „ „ toenemen „ k).

We merken hierbij op, dat het oneindig verre punt links en het oneindig verre punt rechts dezelfde deelverhouding 1, hebben.

Een duidelijker overzicht verkrijgt men door in elk punt van l een loodlijn op te richten en daarop een stuk gelijk aan k maal een willekeurige lengteëenheid af te passen. Verbindt men de eindpunten dier loodlijnen, dan ontstaat deze grafische voorstelling van de schommelingen van de deelverhouding:

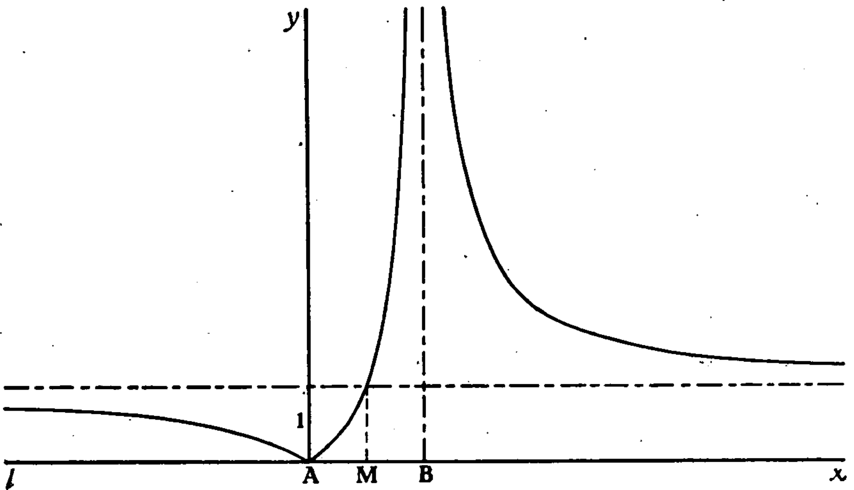


Fig. 5.

[Welke kromme men aldus bekomt zal in nr. 4 onderzocht worden].

Uit het overzicht hierboven blijkt nu dadelijk, dat *bij een willekeurige positieve waarde van k steeds twee punten behooren, een inwendig en een uitwendig, beide aan éénzelfde zijde van M* (links als $k < 1$, rechts als $k > 1$); deze punten zijn *harmonisch verwant* t. o. van AB. Er dient alleen uitzondering gemaakt voor $k = 1$: bij deze waarde behooren het midden M van AB en de twee oneindig verre punten. Kent men echter aan een rechte lijn slechts één oneindig ver punt toe, dan kan de beperking $k \neq 1$ opgeheven worden en de stelling gaat steeds door.

De grafiek maakt de eigenschap als vanzelf sprekend: trekt men een lijn evenwijdig met l op een afstand k dan snijdt deze de grafiek steeds in twee punten, waarvan de projecties op l de punten opleveren waarvoor de deelverhouding $\frac{AC}{BC}$ de waarde k verkrijgt.

De hierboven geuite stelling kan ook als volgt uitgesproken worden:

Een inwendig of een uitwendig punt van AB is volkomen bepaald door zijn absolute deelverhouding — of ook nog:

Hebben twee inwendige of twee uitwendige punten dezelfde deelverhouding, dan vallen ze samen.

Steunend op dit resultaat, kan men het bewijs van het omge-

keerde van een aantal stellingen aanzienlijk verkorten (zie bijv. *Leerboek der Vlakke Meetkunde* door Dr. P. MOLENBROEK, 6[de] druk, stellingen 78, 87*a*, 87*b*, 116, opmerking 2 bij 116).

3. *Relatieve of algebraïsche deelverhouding.*

Neemt men op l een willekeurige richting als de positieve aan, dan krijgen AC, BC beide een teeken [we noteeren ze als *vectoren* $\overline{AC}$, $\overline{BC}$]; de verhoudig $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ krijgt dus ook een teeken. Keert men de positieve richting om, dan veranderen $\overline{AC}$ en $\overline{BC}$ van teeken, doch $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ blijft onveranderd. Deze verhouding, welke dus onafhankelijk is van de keus van een positieve richting op l, noemen wij *de relatieve deelverhouding van C t. o. van AB.*

Het is duidelijk, dat deze relatieve deelverhouding positief is voor een uitwendig, negatief voor een inwendig punt. Mede in verband met nr. 2 krijgen we dus dadelijk een overzicht van de

4. *Veranderingen van de relatieve deelverhouding* $h = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ *bij wisselenden stand van C.*

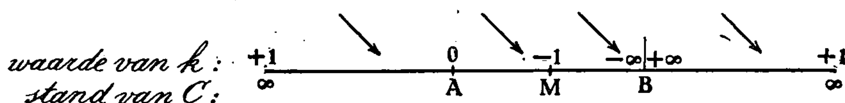


Fig. 6.

Nadert C van links tot B, dan is lim $h = -\infty$.
„ „ „ rechts „ „ „ „ lim $h = +\infty$.

Een grafiek levert nog een duidelijker voorstelling op. De loodlijnen worden boven of onder l getrokken, naarmate $h > 0$ of $h < 0$ is. (Zie fig. 7.)

Welke kromme men aldus bekomt is gemakkelijk na te gaan. We nemen een rechthoekig assenstelsel aan: l (positieve richting AB) als x-as, de loodlijn in A (positieve richting *boven* l) als y-as, en stellen $\overline{AB} = a$ $(a > 0)$, $\overline{AC} = x$. Nu is steeds

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = x - a;$$

dus
$$h = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{x}{x-a}$$

en de vergelijking van de kromme is

$$y = \frac{x}{x-a};$$

het is dus een gelijkzijdige hyperbool, met asymptoten $x = a$, $y = 1$ en gaande door den oorsprong A.

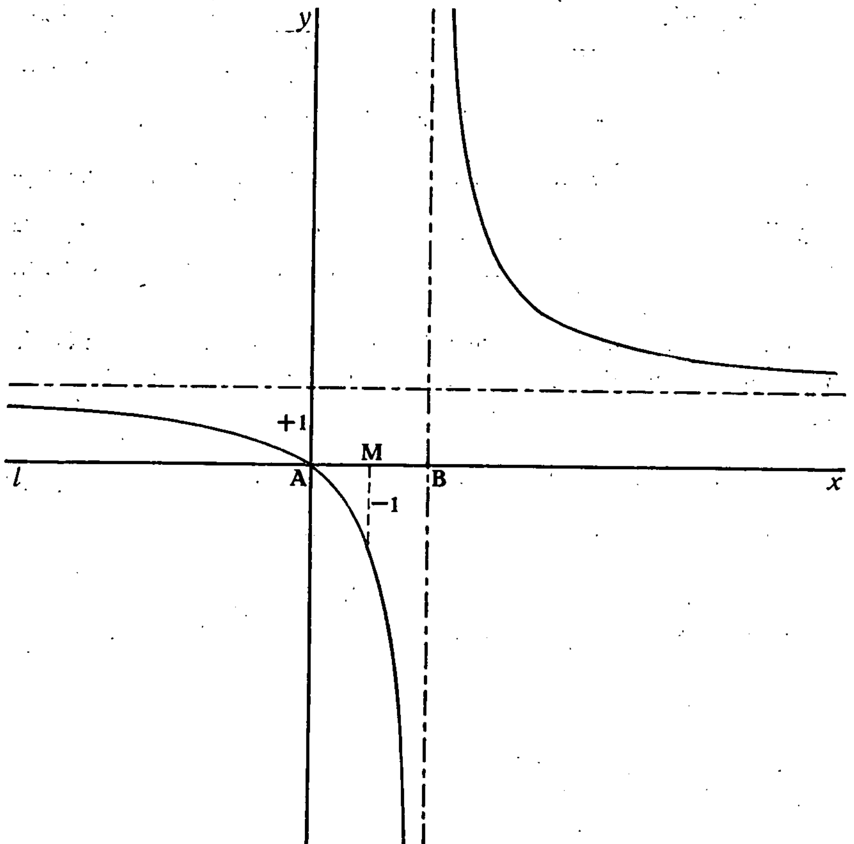


Fig. 7.

De kromme in fig. 5 is, t. o. van hetzelfde assenkruis voorgesteld door de vergelijking

$$y = \left| \frac{x}{x-a} \right|$$

en is af te leiden van de hyperbool in fig. 7 door het deel *onder l* te spiegelen t. o. van *l*.

Het overzicht van fig. 6 en de grafiek van fig. 7 leeren ons nu dadelijk, dat *bij een willekeurige (positieve of negatieve) waarde*

van h steeds één enkel punt behoort; d. i.: *een punt van l is volkomen bepaald door zijn relatieve deelverhouding*; of ook nog: *twee punten met dezelfde relatieve deelverhouding vallen samen.* [Opdat de stelling voor $h = 1$ zal doorgaan, is het noodzakelijk aan een rechte lijn slechts één oneindig ver punt toe te kennen].

Dit resultaat kan met voordeel toegepast worden bij het bewijs van het omgekeerde van sommige stellingen. [Zie bijv. loc. cit. stellingen 96, 98; *Leerboek der Stereometrie* door Dr. P. MOLENBROEK, 6de druk, stellingen 67, 71.]

II. VERDEELING IN UITERSTE EN MIDDELSTE REDEN.

1. *Bepaling.* Een lijnstuk AB (men lette op de volgorde der letters) in U. M. R. verdeelen is het, in- of uitwendig, in twee stukken verdeelen zóó, dat het eerste middelevenredig zij tusschen het tweede en het gegeven lijnstuk zelf; d.i. dus een punt C bepalen (op AB of een van zijn verlengden) zóó dat

$$AC^2 = BC . AB,$$

of

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} \qquad (B).$$

(absolute verhoudingen).

2. *Aantal oplossingen van het vraagstuk.*

We laten C de rechte l (waarop AB gelegen is) doorloopen van oneindig links naar oneindig rechts, gaan de veranderingen na van $\frac{AB}{AC}$ en $\frac{AC}{BC}$ en zullen daaruit kunnen besluiten voor hoeveel standen van C die twee verhoudingen gelijk worden.

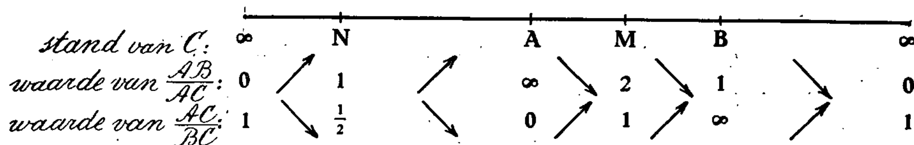


Fig. 8.

(N is gevonden door te nemen AN = AB). Daaruit blijkt, dat er twee standen zijn van C, waarvoor aan de betrekking (B) voldaan wordt: een punt X′ links van N, en een punt X tusschen M en B. Van het eerste zeggen we, dat het AB *uitwendig* in U. M. R. verdeelt; van het tweede, dat het zulks *inwendig* doet.

Duidelijker wordt het bestaan nog van die punten, als we in eenzelfde figuur (fig. 9) de grafiek teekenen van $\frac{AC}{BC}$ in volle lijn (zie fig. 5), en van $\frac{AB}{AC}$ in stippellijn (zie hieronder); deze grafieken snijden elkaar in twee punten waarvan de projecties op *l* precies X′ en X zijn.

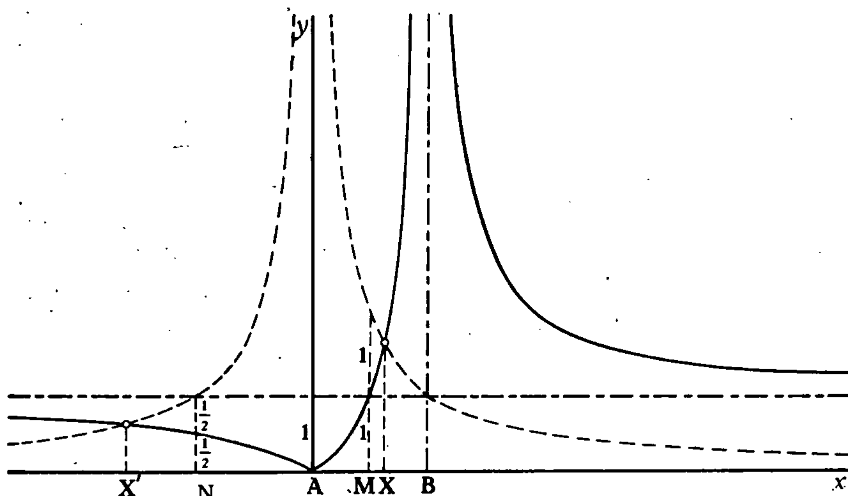


Fig. 9.

[De grafiek van $\frac{AB}{AC}$ heeft, t.o. van het in § I, nr. 4 bepaalde assenkruis, tot vergelijking: $y = \frac{a}{|x|}$; men teekene dus eerst het deel van de gelijkzijdige hyperbool $y = \frac{a}{x}$, dat ontstaat voor positieve waarde van x en spiegele de aldus bekomen lijn t.o. van de y-as].

Men kon eenvoudiger te werk gaan door de betrekking (B) in den vorm

$$\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC}$$

te brengen; $\frac{BC}{AC}$ is de absolute deelverhouding van C t.o. van BA, en zijn grafiek (volle lijn in fig. 10) ontstaat door spiegeling van de grafiek in fig. 5 t.o. van de middelloodlijn van AB; de grafiek van $\frac{AC}{AB}$ (stippellijn in fig. 10) heeft tot vergelijking $y = \frac{|x|}{a}$ en bestaat dus uit twee halve rechten door A. De grafieken

snijden elkaar weer in twee punten, waarvan de projecties op l, X' en X zijn.

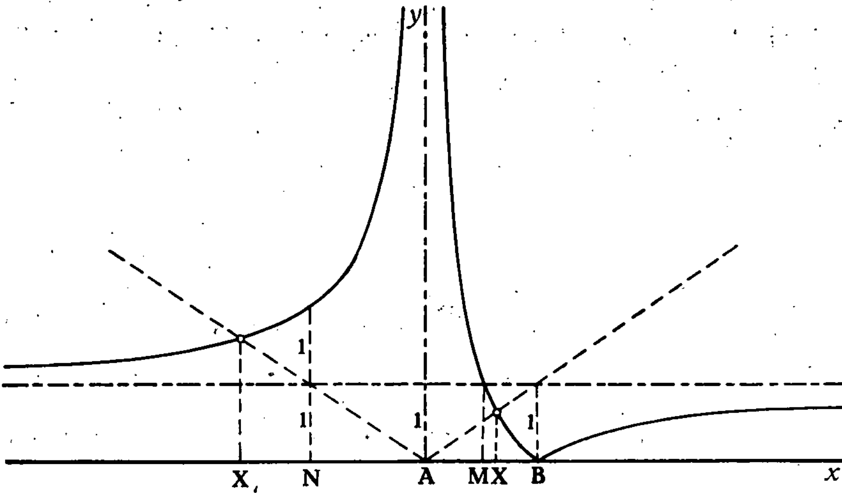


Fig. 10.

3. *Kenmerkende eigenschappen van de punten X en X'.*

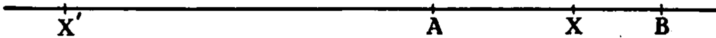


Fig. 11.

Volgens de bepaling is

$$AX'^2 = AB \,.\, BX' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$AX^2 = AB \,.\, BX \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Daaruit willen we nu de betrekkingen

$$AX' - AX = AB \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$AX' \,.\, AX = AB^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

afleiden.

(2) van (1) aftrekkend krijgen we achtereenvolgens:

$$AX'^2 - AX^2 = AB \,.\, BX' - AB \,.\, BX$$

$$(AX' + AX)\,(AX' - AX) = AB\,(BX' - BX)$$

$$X'X \,.\, (AX' - AX) = AB \,.\, X'X$$

$$AX' - AX = AB$$

(3) is dus bewezen. — Verder leidt men af uit (2)

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{BX} = \frac{AB + AX}{AX + BX} = \frac{AX'}{AB} \quad \text{[denk aan (3)].}$$

De evenredigheid gevormd door de beide uiterste verhoudingen levert (4) op.

Omgekeerd: *voldoen twee punten X en X′; het eerste tusschen A en B, het tweede links van A aan de betrekkingen (3) en (4), dan verdeelen zij AB in U. M. R.*

Inderdaad, uit (4) leidt men af, daarbij rekenschap houdend met (3):

$$\frac{AB}{\underline{AX}} = \frac{AX'}{\underline{AB}} = \frac{AB + AX'}{AX + AB} = \frac{BX'}{\underline{AX'}}$$

$$\frac{AB}{\underline{AX}} = \frac{AX'}{AB} = \frac{AX' - AB}{AB - AX} = \frac{AX}{\underline{BX}}.$$

Samenbrengen van de onderstreepte verhoudingen voert dadelijk tot (1) en (2).

Deze uitkomst kan ook zoo geformuleerd worden:

Is $AB = a$ en voldoen twee lijnstukken x' en x aan de betrekkingen

$$x' - x = a, \quad x' \,.\, x = a^2$$

dan is x het grootste stuk van a *inwendig in U. M. R. verdeeld*
en x′ „ kleinste „ „ a *uitwendig „ „ „* .

4. *Constructies voor X en X′.*

1ste Constructie (fig. 12).

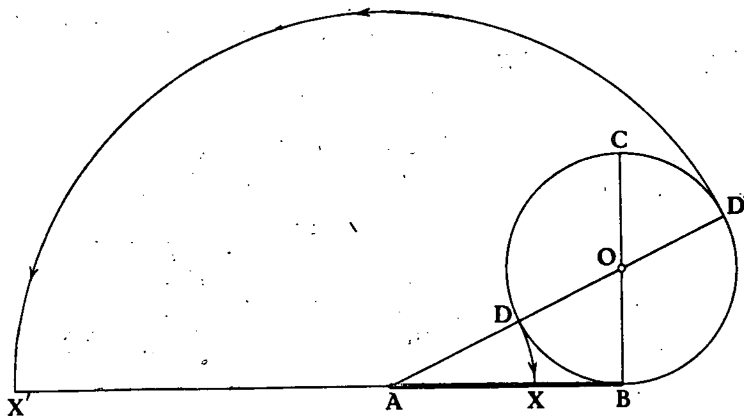


Fig. 12.

Men richt BC = ⊥ AB op, beschrijft op BC als middellijn een cirkel en verbindt zijn middelpunt O met A. Snijdt deze rechte den cirkelomtrek in D en D′, dan is

$$AD' - AD = DD' = AB,$$
$$AD' \,.\, AD = AB^2.$$

Dus is $AD = AX$, $AD' = AX'$ en de punten X, X' worden gevonden door op AB een stuk gelijk aan AD af te passen, en op het verlengde van BA een stuk gelijk aan AC'.

2de constructie (fig. 13).

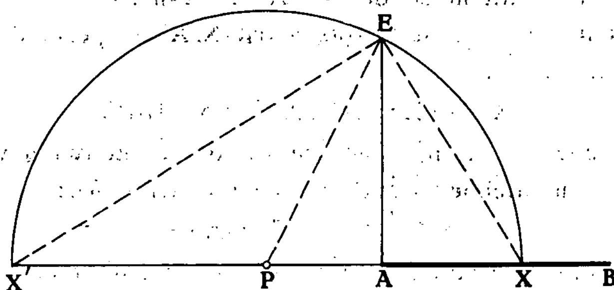


Fig. 13.

Men trekt $AE = \perp AB$, neemt $AP = \frac{AB}{2}$ op het verlengde van BA, en beschrijft cirkel (P, PE); snijdt deze de rechte AB in X en X', dan is

$$AX' - AX = 2\,AP = AB,$$
$$AX' \cdot AX = AE^2 = AB^2.$$

X en X' zijn dus de gezochte punten.

3de constructie (fig. 14) [zie *Leerboek der Vlakke Meetkunde* door DR. P. MOLENBROEK, 6de druk, blz. 231, Opmerking 2⁰].

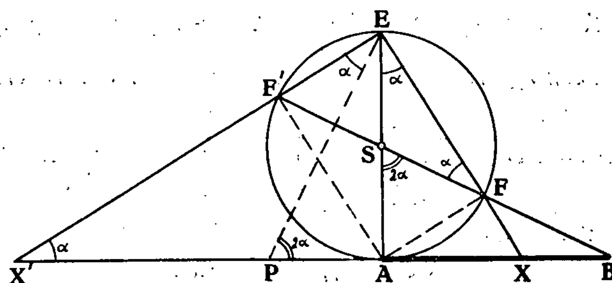


Fig. 14.

Men trekt $AE = \perp AB$, beschrijft op AE als middellijn een cirkel, verbindt zijn middelpunt S met B; snijdt deze rechte den cirkelomtrek in F en F', dan bekomt men de gezochte punten X, X' door F, F' uit E op AB te projecteeren.

Inderdaad

$$AB^2 = BF \cdot BF' \text{ of } FF'^2 = BF \cdot BF'.$$

Deze betrekking bewijst

1°) dat F het lijnstuk F'B inwendig in U. M. R. verdeelt; daar nu FX // F'A, geldt hetzelfde van X t.o. van AB;

2°) dat F' het lijnstuk FB uitwendig in U. M. R. verdeelt; daar F'X' // FA is, geldt hetzelfde van X' t.o. van AB.

Men kan ook, om te bewijzen dat X, X' de gezochte punten zijn, aantoonen dat

$$AX' - AX = AB \,,\; AX' \,.\, AX = AB^2.$$

De tweede betrekking krijgt men door beschouwing van den rechthoekigen driehoek EXX' met de hoogtelijn AE:

$$AX' \,.\, AX = AE^2 = AB^2.$$

Om de juistheid van de eerste te bewijzen, trekt men in denzelfden driehoek de zwaartelijn EP (EP = PX = PX'). Alle hoeken in de figuur α gemerkt zijn gelijk; dus is ook $\angle P = \angle S = 2\alpha$, en daar bovendien AE = AB, zijn de rechthoekige driehoeken APE en ASB congruent; waaruit $AP = AS = \frac{AB}{2}$ (en PE = SB).

Nu is

$$AX' - AX = 2\,AP = AB.$$

Men bewerke nog volgende eigenschappen van fig. 14:

$$AX = BF \,,\; AX' = BF'.$$

Inderdaad:

$$AX = PX - PA = PE - PA = SB - SA = BF;$$
$$AX' = PX' + PA = PE + PA = SB + SA = BF'.$$

5. *Berekening van de stukken, waarin AB verdeeld wordt door X en X'.*

We stellen $AB = a$, en, voor de inwendige verdeeling,

$$AX = a_i \,,\; BX = a_j;$$

voor de uitwendige,

$$AX' = a_u, \quad BX' = a_v.$$

Uit fig. 12 volgt

$$AO^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}; \; AO = \frac{a}{2}\sqrt{5};$$

$$a_i = AX = AD = AO - OD = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

$$a_u = AX' = AD' = AO + OD' = \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Waaruit verder:

$$a_j = a - a_i = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}),$$

$$a_v = a + a_u = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

Uit fig. 13 volgt

$$PE^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}; \; PE = \frac{a}{2}\sqrt{5};$$

$$a_i = AX = PE - PA = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

$$a_u = AX' = PE + PA = \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Uit fig. 14 volgt

$$PE^2 = AE^2 + AP^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}; \; PE = \frac{a}{2}\sqrt{5};$$

$$a_i = AX = PX - PA = PE - PA = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

$$a_u = AX' = PX' + PA = PE + PA = \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Men kan ook de betrekkingen (3), (4) (zie nr. 3) als

$$a_u - a_i = a, \quad a_u \, . \, a_i = a^2$$

aflezen, en a_u, $-a_i$ beschouwen als wortels van de vierkantsvergelijking

$$x^2 - ax - a^2 = 0;$$

waaruit

$$a_u = \frac{a + a\sqrt{5}}{2}, \quad -a_i = \frac{a - a\sqrt{5}}{2};$$

dus

$$a_u = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1); \quad a_i = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

6. *Betrekkingen tusschen a, a_i, a_j, a_u, a_v.*

$$a_i = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1), \quad a_j = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}),$$

$$a_u = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1), \quad a_v = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

Bijgevolg, a van den index i, j, u, v voorzien staat opvolgend gelijk met het vermenigvuldigen met den factor

$$i = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad j = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad u = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad v = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Nu controleert men dadelijk, dat

$$i\,.\,u = 1 = u : i; \quad j\,.\,v = 1 = v\,.\,j;$$
$$i\,.\,i = j \quad ; \quad u\,.\,u = v;$$
$$i\,.\,v = u = v\,.\,i; \quad u\,.\,j = i = j\,.\,u.$$

Men kan dus de betrekkingen opschrijven

$(a_j)_u = a_i$	(1)	$(a_v)_i = a_u$	(6)
$(a_j)_v = a$	(2)	$(a_v)_j = a$	(7)
$(a_i)_u = a$	(3)	$(a_u)_i = a$	(8)
$(a_i)_i = a_j$	(4)	$(a_u)_u = a_v$	(9)
$(a_i)_v = a_u$	(5)	$(a_u)_j = a_i$	(10)

die zonder moeite als stellingen uit te spreken zijn, en waarvan het meetkundig bewijs ook geen moeilijkheid oplevert.

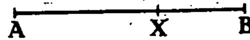


Fig. 15.

Inderdaad, de betrekking $AX^2 = AB\,.\,BX$ drukt niet alleen uit dat X het lijnstuk AB inwendig in U. M. R. verdeelt, doch ook dat A het segment XB uitwendig in U. M. R. verdeelt. Dus:

$$(XB)_u = AX, \quad (XB)_v = AB,$$

en dit staat gelijk met (1) en (2).

Schrijven we nu

$$AB - BX = AX, \quad AB\,.\,BX = AX^2,$$

dan leiden we daaruit af, in verband met de slotopmerking van nr. 3, dat

$$(AX)_u = AB, \quad (AX)_i = BX,$$

wat met (3) en (4) gelijkstaat.

Daar nu verder

$$(AX)_v = AX + (AX)_u = AX + AB = AX',$$

is ook (5) bewezen.

De betrekking $AX'^2 = AB\,.\,BX'$ drukt niet alleen uit

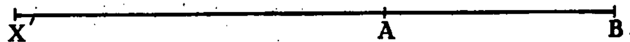


Fig. 16.

dat X' het lijnstuk AB uitwendig in U. M. R. verdeelt, doch ook dat A het segment X'B inwendig in U. M. R. verdeelt. Dus

$$(X'B)_i = AX', \quad (X'B)_j = AB,$$

en dit staat gelijk met (6) en (7).

VAL EN WORP.

EEN BIJDRAGE TOT DE GESCHIEDENIS DER MECHANICA VAN ARISTOTELES TOT NEWTON

DOOR

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS.

461 blz. . . . . . geb. f 8.25

Historische Untersuchungen aus der Geschichte der Wissenschaften gewinnen natürlich an Wert und Wirkung, je wichtiger und fundamentaler das Gebiet ist, dem sie gewidmet sind.

Die Lehre vom Fall (und vom Wurf) ist mit die erste, in der mechanische Gesetze aufzutreten versuchten, und diese waren es, an denen die moderne Mechanik ihren Ursprung nahm. Daraus mag man die Bedeutung ermessen, die, wie schon Mach erkannt hat, einer historischen Betrachtung dieser Dinge zukommt.

Vollen Wert aber kann solche Betrachtung erst finden, wenn alle Gesetze historischer Exaktheit zur Anwendung kommen. Dies ist nun im vorliegenden Werke in bester Form geschehen, und man sagt kaum zuviel, wenn man ausspricht, dasz wir in ihm eine der bedeutendsten Erscheinungen der letzten Jahre auf wissenschaftsgeschichtlichem Gebiete vor uns haben. Verf. gibt alle Beweisstellen in der Ursprache und mit holländ. Uebersetzung.

Der Stoff gliedert sich in 6 Kapitel, die alle von überaus inhaltsreichen und wichtigen Anmerkungen gefolgt werden, die kein Leser überschlagen möge. Um von der groszen Fülle wichtiger Resultate und von dem Inhalte des Buches selbst einen kurzen Begriff zu geben, folgen wir in groszen Zügen dem Gedankengang des Verfs. Das 1. Kapitel (p. 1—56) bringt eine durch Klarheit und Uebersichtlichkeit ausgezeichnete Darlegung wichtiger Grundbegriffe der Physik des Aristoteles und seiner Ansichten über Fall und Wurf.

Eine auszerordentliche Fülle des Interessanten für den Historiker, den Methodologen, Naturphilosophen und den Naturforscher enthält dieses Werk, das eine bedeutende geistige und wissenschaftliche Arbeitsleistung darstellt und den Verfasser und sein Land ehrt. Hugo Dingler, München.

Mitteilungen z. Gesch. d. Medizin und d. Naturwissenschaften. Bd. 24. Heft 3/4.

Na het plan en den inhoud komt de uitwerking, gelijk ik reeds zei, deze maakt een overweldigenden indruk. Men weet niet, wat men in den schrijver het meest moet bewonderen. Daar blijkt een zeldzame speurzin, een ongelooflijk volhardingsvermogen, een zeer ongewone en op zich zelf reeds benijdenswaardige bedrevenheid in het vertalen van Grieksche en Latijnsche teksten, juist over zaken handelende, waar men op 't Gymnasium nooit van leest. Daarenboven een groote mate van belezenheid, van historisch-critisch vernuft en van liefde voor zijn onderwerp — welnu, alle deze zaken samenloopende, hebben hier een boekwerk doen ontstaan, waarop wij Nederlanders trotsch kunnen zijn, nu het door een landgenoot in 't Nederlandsch is geschreven.

Wat hier wordt geboden is zonder twijfel het resultaat van jarenlange studie en nasporingen, beschreven op bloeiende wijze, klaar en bezonken, vaak met geheel nieuwe opinies over historische bijzonderheden, steeds tot verder lezen uitlokkende. Al zou men het alleen lezen om levenslang zijn lessen op school met *betrouwbare* historische bijzonderheden te kruiden, (onbetrouwbare kennen we allemaal bij de vleet), dan was het reeds waard gekocht te worden. J. Bruin.

Chr. M.O. 1/5 '25.

Als premie op NOORDHOFF's WISKUNDIGE TIJDSCHRIFTEN is de prijs tot 1 Jan. 1927 f 6.75.

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.